ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 27 SEPTEMBRE 1937.

PRÉSIDENCE DE M. LOUIS BOUVIER.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Secrétaire perpétuel** dépose sur le bureau un fascicule intitulé Henry Le Chatelier. *Discours prononcés à la séance solennelle du 24 avril 1937.*

Notice nécrologique sur Albert Heim, par M. **Charles Jacob.**

Avec Albert Heim disparaît l'une des plus grandes figures de la géologie alpine.

Né le 12 avril 1849, à Zurich, il y a passé toute sa vie et y est mort le 31 août dernier.

Ses études avaient été poursuivies à l'Université et à l'École polytechnique fédérale, avec des semestres à Berlin. En 1873, à l'âge exceptionnel de 24 ans, il était nommé professeur à l'École Polytechnique et, en 1875, professeur à l'Université. Il a gardé ces deux chaires jusqu'en 1912, c'est-à-dire pendant près de quarante ans. Entre temps, de 1872 à 1902, il eut l'occasion d'effectuer de grands voyages au Vésuve, en Sicile, en Norvège, au Caucase, en Australie et jusqu'en Nouvelle-Zélande.

Son œuvre est fondamentale. On peut d'abord retenir un premier ouvrage paru en 1878, *Ueber den Mecanismus der Gebirgsbildung*, conclusion déjà de longues études sur l'Est des Alpes suisses. A l'aurore des grandes synthèses d'Eduard Suess, puis de Marcel Bertrand, il insiste sur l'importance des mouvements tangentiels; il les décrit jusqu'à des détails lithologiques et il souligne la passivité des massifs éruptifs à une époque où l'on se dégageait à peine de la théorie des soulèvements. En 1888, avec Em. de

Margerie, il donne, en trois langues, un *Essai de nomenclature des dislocations de l'écorce terrestre*, auquel il est toujours prudent de se reporter pour éviter de forger inutilement des mots nouveaux quant à des accidents depuis longtemps reconnus. Viennent ensuite de beaux mémoires : le premier, en 1891, avec Carl Schmidt, où il revient sur *les Hautes-Alpes entre la Reuss et le Rhin;* le second, en 1905, avec Marie Jerosch, Arn. Heim et Ernst Blumer, sur *le Säntis*. Le couronnement de l'édifice est fourni par sa *Geologie der Schweiz*, parue en trois gros volumes de 1919 à 1922. Historique des travaux, pétrographie, stratigraphie et tectonique, rien n'est négligé dans cette sorte d'encyclopédie, telle qu'on voudrait en posséder dans tous les pays.

Président de la Commission géologique suisse, il a été appelé bien souvent à donner son avis, notamment sur les grands tunnels alpins, les tremblements de terre et aussi sur les glissements parfois catastrophiques de terrains. Alpiniste fervent, il a fourni, en 1885, un excellent *Handbuch der Gletscherkunde*.

Il faut ajouter enfin qu'à la précision et à la clarté qui caractérisent ses travaux et qui ont fait aussi sa renommée de professeur, Albert Heim joignait un incomparable talent de dessinateur : ses cartes, ses profils, ses panoramas, les beaux reliefs qu'il a coloriés, celui du Säntis en particulier, sont des modèles du genre. A ce titre, comme à bien d'autres, il a marqué de sa forte empreinte l'orientation de l'école géologique suisse qui l'a pendant longtemps reconnu comme son chef respecté.

Après l'achèvement de son ouvrage sur la Suisse, il s'était retiré de la vie scientifique active, mais la pensée de ce beau vieillard est restée lucide jusqu'au dernier jour, ainsi qu'en témoignent des lettres qu'il écrivait récemment.

L'Académie l'avait élu Correspondant pour la Section de Minéralogie le 26 février 1906 en remplacement du baron F. de Richthofen. Elle tient à adresser des condoléances émues à sa famille, notamment à son fils, Arnold Heim, géologue lui-même et digne du nom qu'il porte.

PHYSIOLOGIE. — *L'isochronisme comme condition de la transmission intercellulaire de l'excitation*. Note de M. **Louis Lapicque**.

L'importance d'un accord chronologique pour la transmission de l'excitation entre deux éléments anatomiques m'était apparue dès nos

premières mesures de chronaxie sur le complexe muscle strié-nerf volontaire. C'était une idée entièrement neuve, mais conforme aux lois générales de la mécanique, notamment par analogie avec la résonance. J'avoue que je l'accueillis avec complaisance, même avant de m'être entièrement convaincu de l'isochronisme neuro-musculaire; tout en poursuivant, sur ce fait empirique, les contrôles expérimentaux qui, d'année en année, lui ont apporté vérification sur vérification ([1]), j'examinais le principe sous son aspect général, en vue de l'appliquer à la théorie du système nerveux.

Je tiens à souligner qu'à aucun moment je ne me suis contenté de l'analogie superficielle avec la résonance. Avant de rien publier, laissant pendant ce temps l'idée théorique sous pli cacheté ([2]), j'ai comparé expérimentalement, sur des nerfs de rapidité différente, les conditions d'efficacité d'ondes électriques *isolées* de durée variable, mais de forme chronologique semblable, avec un maximum atteint en un temps proportionnel à la durée totale ([3]). Commencée avec un orthorhéonome, cette recherche, poursuivie plus commodément avec le double condensateur, a donné le résultat suivant qui avait été prévu d'après les lois générales de l'excitation : *l'intensité liminaire passe par un minimum pour une durée qui varie proportionnellement à la chronaxie du nerf excité* ([4]). Ceci est un résultat capital qui m'a permis, dès cette époque, de considérer *a priori* l'isochronisme comme la condition la plus favorable au passage de l'excitation et par conséquent, comme la condition nécessaire si l'intensité de l'influx excitant atteint juste ce minimum. Il reste la base de la théorie de l'isochronisme, après avoir été confirmé et éclairé par diverses recherches postérieures.

En 1934, Wyss retrouve et précise la loi d'excitation par double condensateur; la courbe des intensités liminaires en fonction du logarithme de la durée est symétrique par rapport au minimum qui devient ainsi très net; il se produit pour une durée de la phase ascendante égale à 8 à 10 chronaxies, c'est-à-dire au *temps utile* du courant constant rhéobasique ([5]).

Le courant sinusoïdal (Coppée, 1934) donne une relation analogue; le minimum se place au point où la période dure 40 chronaxies ([6]); cela fait

---

([1]) Voir ma Note précédente, *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 502.
([2]) *C. R. Soc. de Biol.*, 63, 1907, p. 787.
([3]) *C. R. Soc. de Biol.*, 64, 1908, p. 6.
([4]) *C. R. Soc. de Biol.*, 64, 1908, p. 336 et 589.
([5]) *Arch. de Pflüger*, 233, 1934, p. 754.
([6]) *Arch. int. Physiol.*, 38, 1934, p. 239.

un quart de période pour 10 chronaxies, résultat qui offre un rapprochement curieux avec le précédent. Plus récemment (1936), Hill, Solandt et Katz ([7]) ont publié une série d'expériences confirmant entièrement les résultats de Coppée; la chronaxie n'a pas été mesurée, mais les données des auteurs permettent de la calculer; sur presque toutes les expériences que j'ai calculées ainsi, la période optima est voisine de 40 chronaxies.

D'autre part, on peut retrouver la même relation en physique pure, entre deux circuits électriques donnant des ondes isolées, entièrement amorties. Or cette relation est exactement celle de la résonance; toutefois, pour réserver au terme *résonance* son sens propre, il convient, avec A. M. Monnier, qui a étudié en détail cet accord entre ondes amorties, d'appeler celui-ci *pararésonance* ([8]). La pararésonance, ainsi élucidée, rend compte facilement du rôle de l'isochronisme. Mais M. Hill trouvait cette théorie trop simple. Il était choqué, m'a-t-il semblé, par l'idée que deux chronaxies puissent conditionner le passage de l'excitation; telle est bien l'expression que j'ai donnée de mes résultats; elle les traduit de la façon la plus directe, et peut, en tout cas, être maintenue comme constatation de fait; mais évidemment la condition paraît singulière si l'on conçoit la chronaxie seulement comme un paramètre d'excitabilité. Dans diverses autres circonstances, j'avais déjà eu le regret de constater qu'on se méprend facilement sur le sens du mot chronaxie. Il s'agit d'un temps physiologique propre à chaque cellule et régissant tous ses processus; la chronaxie, au sens strict, n'est qu'une mesure particulière de ce temps physiologique. Pour notre question actuelle, la chronaxie, au sens large, comprend, par définition, l'influx nerveux et le processus, quel qu'il soit, par lequel cet influx excite l'élément suivant. Il est bien entendu que cette affirmation doctrinale est, non pas un *credo*, comme M. Hill me le disait plaisamment, mais une généralisation de faits connus, à vérifier expérimentalement dans chaque cas. Ainsi, la théorie n'est nullement choquante, et nous en avons convenu facilement.

D'autre part, M. Hill désirait y voir l'amplitude (intensité de l'influx et rhéobase du deuxième élément) figurant au même titre que la durée. Il a bien voulu me tracer, de sa main, le plan de la théorie telle qu'elle devait se présenter pour lui paraître logique. Voici ce plan, non pas textuel, mais fidèlement paraphrasé : « Il y a trois facteurs, réglés chacun en ampli-

---

([7]) *Proc. Roy. Soc.*, B, 121, 1936, p. 74.

([8]) *L'excitation électrique des tissus*, Paris, 1934.

tude A et en durée T [9] : 1° excitabilité du nerf; 2° influx nerveux; 3° excitabilité du muscle. Si $T_1 = T_2$, on aura $T_2 = T_3$ lorsque $T_1 = T_3$. Ceci sera la condition du passage *seulement* si A_2 est juste égal ou à peine supérieur à A_3. La curarisation peut se produire ou disparaître aussi bien par un changement d'amplitude que par un changement de durée ».

Je n'ai absolument rien à objecter; cette forme quasimathématique traduit parfaitement ma théorie. Je reconnais que, insistant sur l'aspect *durée* qui était nouveau, je n'ai pas toujours explicité assez nettement le rôle de l'*amplitude;* mais ce rôle était impliqué dans la conception de la pararésonance; dès le début, je l'ai indiqué clairement [10]; et récemment, j'ai invoqué l'élévation de la rhéobase musculaire comme mécanisme de la curarisation dans deux exemples concrets [11]. Ceci n'enlève rien à l'importance de la durée, qui pratiquement est prédominante. Notamment la curarisation par la strychnine ne peut pas être rapportée à une diminution d'amplitude de l'influx nerveux, car alors on ne comprendrait plus que cette substance puisse décurariser après pilocarpine.

J'avoue ne posséder que des indications assez vagues sur le rapport des amplitudes A_2 et A_3; mais le fait que l'hétérochronisme entraîne la curarisation montre que la condition postulée est réalisée; suivant qu'elle le sera plus ou moins exactement, la marge d'hétérochronisme compatible avec la transmission sera plus ou moins grande, comme on le voit dans des expériences diverses.

Il y a une difficulté plus aiguë sur la vérification du rapport de T_1 à T_2. Mon hypothèse primitive considère l'onde de négativité nerveuse comme agissant par elle-même à la manière de nos stimuli électriques artificiels. En fait, la durée de cette onde varie bien comme la chronaxie, de multiples travaux récents ont confirmé à cet égard les quelques données que j'avais d'abord trouvées dans la science; mais il s'est précisé aussi que cette durée

---

[9] M. Hill insiste pour qu'il soit bien entendu que sa conception personnelle (*Proc. Roy. Soc.*, B, **119**, 1936, p. 305) exigerait dans chaque cas, non pas une durée simple, mais deux constantes de temps; le présent exposé, dit-il, serait ainsi plus complexe, mais encore possible; la simplification ici admise suppose un même rapport entre les deux constantes pour les trois facteurs. Il ajoute qu'il ne voit aucun inconvénient à ce que je mentionne mon opposition radicale à sa conception de deux constantes de temps indépendantes.

[10] « Il résulte nécessairement des données ci-dessus que, si cette onde est liminaire, elle se transmettra seulement dans l'élément homochrone » (*C. R. Soc de Biol.*, **63**, 1907, p. 789).

[11] *C. R. Soc. de Biol.*, **114**, 1933, p. 513, et **123**, 1936, p. 391.

est nettement plus courte que la durée optimale des ondes électriques instrumentales. Personne ne m'a jamais objecté ce fait, que j'ai de moi-même signalé à Hill. Néanmoins je reconnais que sur ce point ma théorie est trop simple, et qu'il faudra la compléter. Peut-être est-ce là que prendra place l'intermédiaire chimique; peut-être l'onde de négativité, qui a toujours été enregistrée dans le cours d'un trajet nerveux, serait-elle plus étalée dans l'arborisation terminale. Quoi qu'il en soit, c'est simplement une lacune dans l'explication presque complète de faits expérimentalement établis, qui subsistent, et pour lesquels on n'a fourni jusqu'ici aucune autre explication valable. La théorie de l'intermédiaire chimique présente des lacunes autrement nombreuses et graves. Je suis convaincu qu'il est nécessaire de combiner les deux théories, dont chacune possède sa propre série de démonstrations, comme me l'a écrit Sir Henry Dale.

D'ailleurs le rôle du temps dans l'excitation et la transmission n'est nullement lié à la nature électrique des phénomènes. La chronaxie et l'isochronisme sont des données quantitatives indépendantes de toute hypothèse; à côté de leur pouvoir explicatif, très large, sinon sans limites, ces notions prises en elles-mêmes ont eu le mérite d'ouvrir des directions de recherches nouvelles dont la fécondité n'est pas encore épuisée.

NOMINATIONS.

MM. E. **Jouguet**, A. **Caquot**, G. **Claude** sont désignés pour représenter l'Académie aux cérémonies du *Centenaire de la fondation de l'École des Mines de Liége*.

M. A. **Béhal** est désigné pour représenter l'Académie à la célébration du 20e anniversaire de la fondation de la *Société de Chimie industrielle*, le 30 septembre 1937.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Valérian Agafonoff. *Sols types de Tunisie*.

2° *The First Hundred Years of the Geological Survey of Great Britain*, by Sir John Smith Flett.

3° Maurice Lenglen. *Lavoisier agronome.*

4° Maurice Lenglen. *A propos d'une lettre inédite de J.-B. Dumas.*

CALCUL DES PROBABILITÉS ET ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Nouvelle contribution à l'arithmétique des produits de lois de Poisson.* Note de M. **Paul Lévy**, présentée par M. Louis de Broglie.

1. Désignons par $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ des constantes réelles linéairement indépendantes, et par E l'ensemble des nombres $\zeta = \Sigma h_i \tau_i$, les h_i étant des entiers quelconques que nous appellerons les composantes de ζ. Soit Z une variable aléatoire dépendant d'une loi $\mathcal{L}$ qui définisse une répartition de la probabilité dans E; on peut la définir, soit par sa fonction génératrice $F(x)$, valeur probable de x^Z, soit par celle de la loi à p variables dont dépendent les composantes de Z. Nous appellerons cette fonction de p variables *la fonction génératrice uniformisée* de la loi $\mathcal{L}$; elle *rend*, pour l'étude de la répartition de la probabilité dans E, les mêmes services que $F(x)$ dans le cas où toutes les valeurs possibles de Z sont entières. L'extension dans cet ordre d'idées d'un raisonnement dû à M. Khintchine conduit notamment au théorème suivant :

Lemme fondamental. — *Si une loi $\mathcal{L}$ a une fonction génératrice de la forme*

$$F(x) = x^c e^{P(x)-P(1)} \qquad \left[P(x) = \sum_1^N a_k x^{\sigma_k} \right],$$

il en est de même de tous ses diviseurs.

Si tous les a_k sont positifs, $\mathcal{L}$ est le produit de N lois de Poisson. Ce lemme ramène donc l'étude des diviseurs d'un tel produit, et notamment celle des conditions d'existence de diviseurs indécomposables, à celle du problème d'analyse suivant, que j'ai résolu antérieurement dans le cas où $P(x)$ est un polynome [1] :

Problème fondamental. — *Définir les conditions que doit vérifier* $P(x)$ *pour que la série de puissances* (dont les exposants appartiennent à un ensemble du type E) *qui représente* $F(x)$ *ait tous ses coefficients non négatifs.*

---

[1] *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 944 et 1156.

Indiquons quelques conditions nécessaires, où les a_k n'interviennent que par leurs signes.

Condition $\mathfrak{A}_0$. — *A tout $\sigma = \sigma_n$ correspondant à un a_n négatif correspondent des exposants σ', σ'', ..., de termes de $P(x)$ à coefficients positifs, tels que σ'/σ, σ''/σ, ..., soient > 1, et que σ soit de la forme $h'\sigma' + h''\sigma'' + \ldots$, h', h'', ... étant des entiers* (de signes quelconques).

Condition $\mathfrak{A}$ (ne se distinguant pas de $\mathfrak{A}_0$ si tous les σ_k ont un diviseur commun). — *La condition $\mathfrak{A}_0$ reste vérifiée si les σ_k varient, cette variation étant soumise à la seule restriction de conserver les relations de la forme* $\Sigma h_k \sigma_k = 0$ (les h_k étant entiers) *qui existent entre ces exposants et de n'en ajouter aucune.*

Ainsi, α étant positif,

$$P(x) = ax^{1-2\alpha} + bx^{1-\alpha} - x + x^{1+\alpha} + x^{1+2\alpha}$$

vérifie toujours la condition $\mathfrak{A}_0$; il ne vérifie $\mathfrak{A}$ que si α est rationnel ou si a et b sont positifs.

Condition $\mathfrak{B}$. — *Tout $\sigma = \sigma_n$ correspondant à un a_n négatif admet une représentation* (autre que $\sigma = \sigma$) *par la forme $h'\sigma' + h''\sigma'' + \ldots$, σ', σ'', ... étant des exposants de termes non nuls de $P(x)$ et h', h'', ... des entiers positifs.*

Je pense revenir sur le cas général; étudions maintenant un cas particulier.

2. Cas où tous les σ_k sont entiers. — Nous poserons ici :

$$P(x) = \Sigma a_k x^k \qquad (k = -N', -N'+1, \ldots, N;\ a_0 = 0),$$

et désignerons respectivement par δ' et δ'' les p. g. c. d. des exposants négatifs et positifs figurant dans $P(x)$ avec des coefficients non nuls.

Condition nécessaire $\mathfrak{C}$. — Tout n tel que $a_n < 0$ est représentable par la forme $h\delta_n + h'n' + h''n'' + \ldots$, δ_n désignant δ' si $n > 0$ et δ'' si $n < 0$, n', n'', ... étant compris entre 0 et n et étant des degrés de termes non nuls de $P(x)$, et h, h', h'', ... étant des entiers non négatifs [δ' et δ'' sont > 0; si $P(x)$ est un polynome, $h\delta'$ ne peut représenter que zéro].

Théorème 1. — *Si les conditions nécessaires $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sont vérifiées, la condition nécessaire et suffisante pour le problème fondamental est que les coefficients négatifs de $P(x)$ soient assez petits* (en supposant que ces coefficients négatifs varient proportionnellement à un paramètre λ, les autres restant fixes, cette condition prend la forme $\lambda \leq \lambda'$, λ' étant un nombre positif fini).

Théorème 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la loi $\mathfrak{L}$*

définie par $P(x)$ *soit indécomposable ou admette des diviseurs indécomposables est que* $P(x)$ *ait au moins un coefficient négatif, ou qui, initialement positif ou nul, puisse être rendu négatif sans que les conditions* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{C}$ *cessent d'être vérifiées.*

Remarques. — $\mathcal{C}$ entraîne $\mathcal{B}$; si $P(x)$ est un polynome, $\mathcal{C}$ se réduit à $\mathcal{B}$ et ces énoncés se réduisent à ceux de mes Notes antérieures. Si $\delta' = \delta'' = 1$, $\mathcal{C}$ est identiquemenf vérifié, et il n'y a qu'à tenir compte de $\mathcal{A}$ [1].

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'existence de fonctions associées aux solutions des systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales à coefficients linéaires.* Note [1] de M. **Rodolphe-Henri Germay.**

La méthode de M. Nikliborc [2], appliquée aux systèmes d'équations aux différentielles totales complètement intégrables

$$(1) \qquad dz_j = \sum_{k=1}^{k=n} a_{jk}(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)\, dx_k \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

ramène la recherche de leurs intégrales s'annulant pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$ à celle des solutions des équations intégrales

$$(2) \qquad z_j(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \{ x_k a_{jk}[tx_1, \ldots, tx_n; z_1(tx_1, \ldots, tx_n), \ldots, z_m(tx_1, \ldots, tx_n)] \} \, dt,$$

satisfaisant aux mêmes conditions initiales.

---

(1) J'ai omis, dans la bibliographie de mon récent livre sur *l'addition des variables aléatoires,* le Mémoire de M. H. Steinhaus, *Les probabilités dénombrables...* (*Fundamenta mathematicae,* 4, 1923, p. 286-310). Au paragraphe 2 de ce Mémoire, l'auteur, traduisant en langage de calcul des probabilités des théorèmes de M. Burstin et de M. Rademacher, se trouve énoncer le corollaire 46,1 et un cas particulier du théorème 47 de mon Livre, et cela à une date où la théorie des probabilités dénombrables était encore dans son enfance.

(1) Séance du 20 septembre 1937.

(2) W. Nikliborc, *Studia mathematica,* 1, 1929, p. 41-49.

Supposons que les a_{jk} soient de la forme

$$(3)\quad a_{jk}=A_{jk}^{(1)}(x_1,\ldots,x_n)z_1+\ldots+A_{jk}^{(m)}(x_1,\ldots,x_n)z_m+A_{jk}^{(0)}(x_1,\ldots,x_n).$$

Au lieu des équations (2) écrites en détaillant les valeurs des a_{jk}, considérons les équations plus générales

$$(4)\quad z_j(x_1,\ldots,x_n)=\lambda\int_0^1\sum_{k=1}^{k=n}\left\{x_k\left[\sum_{s=1}^{s=m}A_{jk}^{(s)}(tx_1,\ldots,tx_n)z_s(tx_1,\ldots,tx_n)+A_{jk}^{(0)}(tx_1,\ldots,tx_n)\right]\right\}dt,$$

où λ est un paramètre qu'on fera égal à l'unité pour retrouver les équations données. Imitons la méthode d'approximations successives imaginée par M. É. Picard pour l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre, de forme linéaire et du type hyperbolique ([3]), et cherchons à satisfaire formellement aux équations (4) par des séries

$$(5)\quad z_j=z_{j0}(x_1,\ldots,x_n)+\lambda z_{j1}(x_1,\ldots,x_n)+\ldots+\lambda^k z_{jk}(x_1,\ldots,x_n)+\ldots.$$

Moyennant les conditions initiales données, on trouve

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &z_{j0}=0,\qquad z_{j1}=\int_0^1\sum_{k=1}^{k=n}[x_k A_{jk}^{(0)}(tx_1,\ldots,tx_n)]\,dt,\\ &z_{j,\mu+1}=\int_0^1\left\{\begin{aligned}&\left[\sum_{k=1}^{k=n}x_k A_{jk}^{(1)}(tx_1,\ldots,tx_n)\right]z_{1,\mu}(tx_1,\ldots,tx_n)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\left[\sum_{k=1}^{k=n}x_k A_{jk}^{(m)}(tx_1,\ldots,tx_n)\right]z_{m,\mu}(tx_1,\ldots,tx_n)\end{aligned}\right\}dt.\end{aligned}\right.$$

Désignons par M_{jk} des nombres positifs fixes supérieurs aux modules des fonctions continues $A_{jk}^{(s)}(j,s=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n)$. Représentons par M la plus grande des sommes

$$(7)\quad M_{11}+\ldots+M_{m1},\quad\ldots,\quad M_{1n}+\ldots+M_{mn}.$$

On établit de proche en proche que

$$(8)\quad \sum_{j=1}^{j=m}|z_{j,\mu}(x_1,\ldots,x_n)|<M^{\mu}\frac{[|x_1|+\ldots+|x_n|]^{\mu}}{\mu!}.$$

([3]) É. Picard, *Journal de Mathématiques*, 4e série, 6, 1890, p. 145-210.

Les séries (5) convergent effectivement et représentent les solutions des équations (4) s'annulant en $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Par application de la formule de Dirichlet, on trouve que les fonctions $z_{j,\mu}(x_1, \ldots, x_n)$ s'écrivent sous la forme

$$(9)\quad z_{j,\mu}(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} \left[\sum_{k=1}^{k=n} x_k A_{1k}^{(0)}(tx_1, \ldots, tx_n)\right] g_{j,\mu}^{(1)}(x_1, \ldots, x_n; t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \left[\sum_{k=1}^{k=n} x_k A_{mk}^{(0)}(tx_1, \ldots, tx_n)\right] g_{j,\mu}^{(m)}(x_1, \ldots, x_n; t) \end{array} \right\} dt.$$

Les fonctions $g_{j,\mu}^{(s)}(x_1, \ldots, x_n; t)$ se déterminent de proche en proche par les formules récurrentes

$$(10)\quad \left\{ \begin{array}{l} g_{j,\mu+1}^{(s)}(x_1, \ldots, x_n; t) = \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} \left[\sum_{k=1}^{k=n} x_k A_{jk}^{(1)}(ux_1, \ldots, ux_n)\right] g_{1,\mu}^{(s)}\left(ux_1, \ldots, ux_n; \frac{t}{u}\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \left[\sum_{k=1}^{k=n} x_k A_{jk}^{(m)}(ux_1, \ldots, ux_n)\right] g_{m,\mu}^{(s)}\left(ux_1, \ldots, ux_n; \frac{t}{u}\right) \end{array} \right\} du, \\ \qquad (j, s = 1, 2, \ldots, m), \end{array} \right.$$

moyennant les valeurs initiales

$$(11)\quad g_{11}^{(1)} = 1, \quad g_{11}^{(2)} = 0, \quad \ldots, \quad g_{11}^{(m)} = 0; \quad \ldots; \quad g_{m1}^{(1)} = 0, \quad g_{m1}^{(2)} = 0, \quad \ldots, \quad g_{m1}^{(m)} = 1.$$

On montre que

$$(12)\quad |g_{1,\mu}^{(s)}| + \ldots + |g_{m,\mu}^{(s)}| < M^\mu \frac{[|x_1| + \ldots + |x_n|]^\mu}{\mu!}.$$

Les séries

$$(13)\quad G_j^{(s)}(x_1, \ldots, x_n; t; \lambda) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \lambda^\mu g_{j,\mu}^{(s)}(x_1, \ldots, x_n; t)$$

convergent uniformément et les solutions des équations (4) s'écrivent

$$(14)\quad z_j(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} \left[\sum_{k=1}^{k=n} x_k A_{jk}^{(0)}(tx_1, \ldots, tx_n)\right] G_j^{(1)}(x_1, \ldots, x_n; t; \lambda) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \left[\sum_{k=1}^{k=n} x_k A_{mk}^{(0)}(tx_1, \ldots, tx_n)\right] G_j^{(m)}(x_1, \ldots, x_n; t; \lambda) \end{array} \right\} dt.$$

Les fonctions $G_j^{(s)}$ jouent ici un rôle analogue à celui de la fonction de Riemann dans l'intégration de l'équation aux dérivées partielles mentionnée plus haut.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *La composition de l'électron et l'énergie de fixation.* Note [1] de M. **Santiago Antunez de Mayolo**, présentée par M. Louis de Broglie.

Nous avons montré [2] que, pour la matérialisation d'un photon en électron, il doit y avoir une certaine vitesse critique u_0 minima, qui divisée par sa vitesse maxima c dans le vide est la constante α de structure fine. Examinons à présent quelle est la cause du ralentissement de la vitesse d'un tel photon jusqu'à la vitesse critique de matérialisation.

Selon la formule d'Einstein, un électron en repos de masse m_0 possède une énergie latente m_0c^2, ce qui correspond dans la dynamique relativistique de l'électron au rayon

$$l = \frac{e^2}{m_0 c^2}, \tag{1}$$

que nous avons trouvé [2] correspondre au rayon du photon de vitesse critique u_0 qui se matérialise en électron.

La théorie électromagnétique donne comme rayon de l'électron

$$r = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m_0 c^2}. \tag{2}$$

La différence de valeurs entre l relativistique et r électromagnétique n'a encore jamais pu être expliquée d'une manière satisfaisante. La raison de la différence soulignée réside dans ce fait fondamental : l'électron, qui est un corpuscule matériel, n'est pas seulement de nature électrique ; il contient un noyau d'un élément neutre, qui n'est pas électrique et sert pour assurer la stabilité du corpuscule contre la répulsion électrostatique. Ainsi l'énergie latente de l'électron se compose de deux parties : l'une $3m_0c^2/4$ correspond à l'énergie de nature électrique, et le reste $m_0c^2/4$ à l'énergie de fixation du corpuscule et qui apparaît comme masse du neutre nucléaire sans action électrique extérieure, comme nous le verrons plus loin.

---

[1] Séance du 20 septembre 1937.

[2] *Comptes rendus*, **205**, 1937, p. 360.

En général, pour qu'un photon se matérialise, il doit avoir au moins la même masse dans le vide que la somme des masses des corpuscules qui en résultent. Nous allons raisonner en tenant compte seulement de l'énergie nécessaire pour la formation de l'électron, soit $h\nu = m_0 c^2$. Écrivons

$$(3) \qquad m_0 c^2 = \frac{3}{4} m_0 c^2 + \frac{1}{4} m_0 c^2.$$

Si nous égalons l'énergie $3m_0 c^2/4$ avec l'énergie $e^2/2r$ qui, d'après la loi de Coulomb électrostatique, aurait une charge e distribuée uniformément sur une sphère de neutre nucléaire de rayon r, nous déduisons pour le rayon r justement la formule (2) électromagnétique. En comparant les rayons l et r nous voyons que $r = 2l/3$, donc en fonction de l la formule (3) devient

$$(4) \qquad m_0 c^2 = \frac{3}{4} \frac{e^2}{l} + \frac{1}{4} m_0 c^2,$$

et puisque, d'après la formule (1) $m_0 c^2 l = e^2$, il en résulte l'identité

$$(5) \qquad e^2 = \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{4} e^2 = e^2.$$

Cette identité montre qu'effectivement, en dehors de l'énergie électromagnétique $3e^2/4l$, il faut tenir compte de l'énergie de fixation du corpuscule et dont le coefficient inertial est justement celui qui correspond à la masse $m_0/4$ du noyau de rayon r. On comprend aussi immédiatement par l'englobement du neutre nucléaire, la raison du ralentissement de la vitesse du photon qui se matérialise. Comme vérification nous allons déduire de (3) le coefficient α de structure fine et pour cela soit $h\nu = m_0 c^2$:

$$(6) \qquad h\nu = \frac{e^2}{2r} + \frac{1}{4} h\nu.$$

Donc $3h\nu/4 = e^2/2r$ et, puisque $\nu = c/2\pi\rho_1$, appelant $\rho_1 = h/2\pi m_0 c$, le rayon de tel photon dans le vide est

$$(7) \qquad \alpha = \frac{3r}{2\rho_1} = \frac{2\pi e^2}{hc}.$$

Nous vérifions ainsi que $3r/2 = l$, donc $\alpha = l/\rho_1$.

Quand l'électron se dématérialise — ce qui arriverait pour une vitesse interne de rotation $> u_0$ — le noyau en s'expandant doit faire réapparaître l'énergie absorbée pour la fixation du corpuscule, de manière que le photon

résultant ait la même énergie que celle de matérialisation. Cette conclusion est inévitable tant que l'on admet le principe de la conservation de l'énergie. Ainsi, l'élément neutre, véritable substratum de la matière, jouerait un rôle étrange pas soupçonné : la matérialisation, avec formation du noyau, absorbe l'énergie rayonnante comme un gaz qui se comprime; et la dématérialisation, avec destruction partielle ou totale du noyau, restitue l'énergie absorbée comme un gaz qui se dilate, et toujours dans tous les corpuscules l'énergie de fixation se trouverait mesurée par la masse du neutre nucléaire. Les deux parties de l'énergie latente W seraient : E électrique et N de fixation ($W = E + N$), et varieraient selon les corpuscules pouvant manquer l'une ($N = O$ pour le photon dans le vide, et $E = O$ pour le neutron). Ainsi grâce à la fonction du neutre nucléaire comme mesure de l'énergie de fixation de corpuscule, devient intelligible physiquement et non seulement mathématiquement, l'énergie latente relativistique et son équivalence avec l'énergie rayonnante.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur la mesure à distance de l'état électrique de la surface des corps isolants.* Note [1] de MM. **Pierre Dupin** et **Louis Sacré**, transmise par M. Charles Camichel.

L'étude de certaines perturbations constatées lors du fonctionnement d'appareils amplificateurs de grande sensibilité nous a montré que ces perturbations étaient dues à la présence d'isolants voisins.

Afin d'étudier ces phénomènes, nous avons construit un appareil dont le principe est le suivant :

Tout corps électrisé crée autour de lui un champ électrique dont la répartition dépend de la forme du corps, de sa charge et de la présence des masses environnantes. Si l'on crée une perturbation périodique, par exemple par le déplacement d'une masse métallique au potentiel zéro, les lignes de force du champ se trouvent modifiées et le potentiel d'une électrode, placée en un point quelconque, varie avec la fréquence de la perturbation. Cette électrode étant reliée à un dispositif amplificateur, on peut, en mesurant la tension de sortie, connaître la tension d'entrée. De plus, si l'on remplace l'isolant étudié par une masse métallique de même forme, dont on peut faire varier le potentiel par rapport au sol, il est facile,

---

[1] Séance du 20 septembre 1937.

par comparaison, d'obtenir une mesure de l'électrisation moyenne du corps isolant.

Pratiquement, nous avons créé la perturbation soit à l'aide d'un disque percé de trous, soit au moyen d'une masse dentée, tournant à grande vitesse à proximité de l'électrode reliée à l'amplificateur. Nous avons aussi utilisé une tige cylindrique métallique vibrant dans le champ et constituant elle-même l'électrode de mesure.

On voit qu'avec un tel dispositif, il n'existe aucune liaison entre l'appareil de mesure et le corps dont on désire étudier l'électrisation. On réalise ainsi un télé-électromètre qui ne peut perturber d'une façon sensible le corps isolant. Sa sensibilité peut d'ailleurs varier, très facilement, dans de grandes limites et permettre d'effectuer rapidement les mesures les plus diverses.

Nous avons pu à l'aide de cet appareil faire, en particulier, les constatations suivantes :

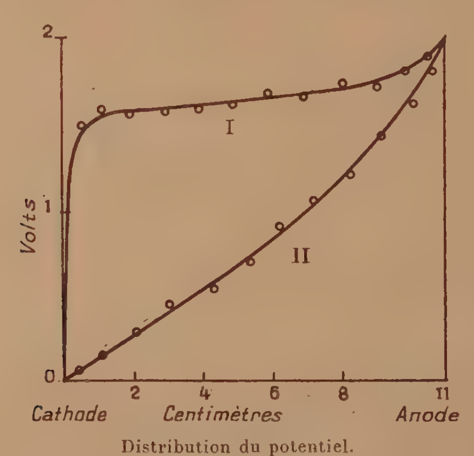
Les corps isolants sont toujours plus ou moins électrisés et cette électrisation peut donner lieu, pour certains d'entre eux, à des phénomènes non négligeables. Il en est ainsi pour le caoutchouc, corps essentiellement déformable. Nous avons examiné différents échantillons de ce corps découpés en forme de disque de 5^{cm} de diamètre et de 4^{mm} d'épaisseur et nous avons pu constater que le potentiel moyen pouvait passer de quelques volts à plusieurs centaines de volts dès qu'ils étaient légèrement agités ou frottés. Les résultats sont d'ailleurs variables suivant l'état de la surface et la nature de l'échantillon.

On voit donc que, dans bien des cas, la présence d'isolants peut être la cause de perturbations dans le fonctionnement de certains appareils, et qu'il est nécessaire de prendre des précautions convenables lorsque l'on utilise des amplificateurs à lampes à grande amplification ou lorsque l'on effectue des mesures sur les diélectriques.

Enfin, lorsqu'on voit l'importance des tensions apparaissant à la surface d'une lame de caoutchouc frottée ou agitée (de l'ordre d'un millier de volts), on peut se demander si le *bain électrique* auquel sont soumises des personnes portant des vêtements caoutchoutés n'a pas sur elles une influence bonne ou mauvaise.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la présence d'iode dissous dans l'iodure de potassium aqueux et les propriétés électriques du milieu.* Note [1] de Mlle **Suzanne Veil**, présentée par M. Georges Urbain.

La présence d'iode dissous dans l'iodure de potassium aqueux a été reconnue agir dans le sens d'un abaissement de la conductivité électrique du milieu, d'après les recherches de Le Blanc et Noyes [2], Burgess et Chapman [3], Bray et Mac Kay [4]. Les présentes études à l'électromètre ont révélé, d'autre part, que le même facteur influence encore de manière très nette la distribution de potentiel qui s'établit dans le milieu sous tension.



Distribution du potentiel.
I, IK aqueux saturé exempt d'iode; II, IK aqueux saturé contenant de l'iode à saturation.

La tension est appliquée entre anode et cathode de platine, dans une cuve de verre longue et étroite jalonnée d'électrodes-sondes de platine en des points repérés. Les mesures de gradient de potentiel, au niveau de chaque électrode-sonde, restent significatives autant qu'elles ne sont pas perturbées par des effets Volta parasites, c'est-à-dire autant que le bain n'est pas encore souillé par les produits de dissociation. Il importe alors d'opérer

(1) Séance du 2 août 1937.
(2) *Z. f. phys. Chem.*, 6, 1890, p. 385.
(3) *J. Chem. Soc.*, 85, 1904, p. 1305.
(4) *J. Am. Chem. Soc.*, 32, 1910. p. 914.

aussi promptement que possible, et en ayant eu soin d'imposer à la cuve une agitation préalable.

La courbe I de la figure a été tout d'abord obtenue avec une solution aqueuse saturée d'iodure de potassium exempte d'iode, soumise à une tension de 2 volts appliquée entre électrodes terminales distantes de 11^{cm}. Les mesures sont pratiquées dès avant toute apparition d'iode à l'anode. Au voisinage immédiat des électrodes se manifestent des sauts de potentiel inégaux ; le saut cathodique est beaucoup plus prononcé que le saut anodique, tandis que dans l'intervalle intermédiaire, on trouve un petit gradient de potentiel sensiblement ohmique.

Si maintenant, dans des conditions expérimentales analogues, la même solution contient une quantité suffisante d'iode dissous, la distribution de potentiel qu'elle fournit cesse d'offrir les mêmes particularités. Par exemple, pour une dissolution d'iode à saturation dans l'iodure de potassium aqueux saturé, cette distribution est illustrée par une courbe, telle que la courbe II de la figure, courbe cessant de trahir aux électrodes des discontinuités visibles, et devenue pratiquement régulière.

L'altérabilité des propriétés électriques de l'iodure de potassium aqueux par présence d'iode dissous peut être rapprochée de phénomènes divers récemment pris en considération par Kendall ([5]), et discutés par lui du point de vue de la structure intime des solutions.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la structure stéréochimique du pentachlorure de phosphore*. Note de MM. **Henri Moureu**, **Michel Magat** et **Georges Wetroff**, transmise par M. Georges Urbain.

Des expériences sur les anomalies que présente le pentachlorure de phosphore à son point de fusion ([1]), et sur les spectres Raman ([2]), du composé à l'état solide et liquide, nous ont permis d'établir qu'il existe deux formes différentes de la molécule PCl^5 : à l'état solide elle possède une structure dissymétrique (tétraèdre PCl^4 dont l'atome de phosphore occupe

---

([5]) *Trans. Farad. Soc.*, 33, 1937, p. 2.

([1]) Henri Moureu, Michel Magat et Georges Wétroff, *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 257.

([2]) Henri Moureu, Michel Magat et Georges Wétroff, *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 276.

le centre de gravité, le cinquième atome de chlore étant en dehors de l'édifice), tandis que la structure est symétrique pour le liquide (bipyramide trigonale). Le but de la présente Note est de montrer que ce dualisme de structure permet d'interpréter l'ensemble des propriétés physiques et chimiques du pentachlorure de phosphore, qui apparaissent parfois comme incohérentes.

Nous avons établi en premier lieu que l'anomalie thermique à 107°-115°, signalée en 1936 (1), correspond à l'existence d'un maximum de la chaleur spécifique vers 115°. L'allure dissymétrique de la courbe obtenue après une étude sommaire de la chaleur spécifique en fonction de la température, suggère que l'on doit avoir affaire à un phénomène analogue à la rotation du groupe NH^4 qui a été observée dans le cas des composés NH^4Cl, NH^4Br, NH^4I (3). Dans le PCl^5 solide ce serait donc le tétraèdre PCl^4 qui aurait la possibilité d'acquérir un mouvement de rotation dans le cristal. Ajoutons que la chaleur de fusion est anormalement élevée (10 K.cal. environ par molécule).

Les modifications de structure que subit le pentachlorure de phosphore en changeant d'état physique expliquent immédiatement les anomalies de conductibilité et de constante diélectrique signalées par divers auteurs. La conductibilité du pentachlorure de phosphore liquide est au moins 100 fois plus faible que celle du solide [(4), (5)]; de même la constante diélectrique à l'état liquide (2,7 à 165°) est inférieure à celle du produit cristallisé (4,2 à 135°), ce qui est assez exceptionnel (4). Simons et Jessop, auteurs de ces derniers travaux, en concluaient que le PCl^5 liquide doit posséder une structure symétrique, ce que nos expériences ont effectivement démontré. Quant à la conductibilité plus élevée de l'état cristallin, elle est un argument important en faveur de la structure $[(PCl^4)^+Cl^-]$, que nous avons proposée, où la liaison (PCl^4)—Cl est en réalité une superposition des termes coulombien et homéopolaire, aucun des deux n'étant négligeable par rapport à l'autre. La partie polaire de la liaison est mise en évidence par la valeur relativement élevée de la constante diélectrique; elle peut permettre la libération de quelques ions Cl^- et accroître la conductibilité. Par ailleurs, lorsque l'on cherche à préciser la stéréochimie de la molécule

---

(3) Voir Fowler, *Proc. Roy. Soc.*, **151**, 1935, p. 1.
(4) Simons et Jessop, *J. Am. Chem. Soc.*, **53**, 1931, p. 1263.
(5) Voigt et Biltz, *Zeit. Anorg. Chem.*, **133**, 1924, p. 277.

PCl^4Cl, en prenant pour base de calcul 3,3 Å [6] comme distance minimum des centres de deux chlores non liés entre eux, on trouve que la distance de l'atome de phosphore aux atomes de chlore du tétraèdre PCl^4 est de 2,02 Å, tandis qu'elle est de 3,38 Å pour le cinquième atome de chlore.

L'étude directe du moment électrique fournit également des données fort intéressantes en accord avec notre conception. D'après les expériences les plus récentes, le pentachlorure PCl^5 en solution possède un moment permanent [7], tandis que le pentafluorure PF^5 gazeux n'en présente pas [8]. La diffraction des électrons montre que le pentafluorure PF^5 gazeux dont le point d'ébullition est —84,6 C a une structure symétrique [9] identique à celle que nous avons assignée au PCl^5 liquide. Pour le pentachlorure de phosphore l'étude du moment électrique, effectuée au voisinage de la température ordinaire en solution dans CCl^4, permet de conclure que ces solutions contiennent une proportion notable de molécules dissymétriques, telles que nous les avons imaginées dans le solide.

Il est également possible d'expliquer certaines différences d'ordre chimique observées [10] au cours de diverses réactions mettant en jeu le pentachlorure de phosphore et sur lesquelles on a fondé souvent des hypothèses de structure. Il existe d'abord toute une catégorie de composés organiques avec lesquels le pentachlorure agit comme s'il avait la forme $PCl^4.Cl$ (indène, styrolène, salol, acide oxalique, dibenzoylméthane, etc.), le groupement PCl^4 se fixant d'un bloc. Mais on connaît également d'autres composés, du type de la 2.3-diphénylindone, où le pentachlorure de phosphore paraît se comporter comme $PCl^3.Cl^2$, car il y a addition de deux atomes de chlore et formation simultanée de trichlorure PCl^3. Le fait intéressant à souligner est que le premier type de réaction a lieu à la température ordinaire, tandis que pour les indones il est nécessaire d'opérer à température beaucoup plus élevée (160-180°). Le fait que l'on trouve deux formes moléculaires distinctes, ayant chacune leur domaine propre d'exis-

---

(6) MAGAT, *Zeit. phys. Chem.*, B, 16, 1932, p. 14.

(7) TRUNEL, *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 37.

(8) LINKE et ROHRMANN, *Zeit. phys. Chem.*, B, 35, 1937, p. 256.

(9) BRAUNE et PINNOW, *Zeit. phys. Chem.*, B, 35, 1937, p. 239.

(10) BERGMANN et BONDI, *Ber. dtsch. chem. Ges.*, 63, 1930, p. 1158; 64, 1931, p. 1455; 66, 1933, p. 278 et 286; ANSCHÜTZ et WENGER, *Lieb. Ann.*, 482, 1930, p. 25; GALL et SCHÜPPEN, *Ber. dtsch. chem. Ges.*, 63, 1930, p. 482, etc.

tence déterminé par les conditions physiques, permet donc d'expliquer les contradictions précédentes qui ne sont qu'apparentes. En effet il existe réellement un atome de chlore particulier dans le pentachlorure de phosphore solide ou en solution à basse température, tandis qu'il y en a deux stériquement différents des trois autres et possédant des liaisons plus faibles dès que les conditions opératoires font apparaître la molécule à structure symétrique.

La séance est levée à 15h25m.

A. Lx.